Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formations d'Ingénieurs
Session: Juin 2014

Concours en Mathématiques Physique

# Correction de l'Épreuve de Mathématiques I

## Problème I:

### Partie I (points)

1. **Justifier l'existence de $I$.**

L'application $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. **Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $x \geq 0$.**

L'application $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de $0^+$:

$$\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)} = 0 \text{ si } x > 0,\ \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \text{ et } \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)} = +\infty \text{ si } x < 0.$$

Donc, $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $x \geq 0$.

3. **Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.**

Soit $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}$.

L'application $g$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$. De plus, on a:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*,\ \left|\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\text{: continue par morceaux et intégrable sur } ]0,+\infty[.$$

Ainsi, $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

4. **Montrer que $f(0) = \pi$.**

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{u=\sqrt{t}}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi.$$

5. **Montrer que $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=0$.**

On, pour tout $x>0$, $t\longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et,

$$0\leq f(x)\leq \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt \underset{u=xt}{=} \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du \underset{x\mapsto+\infty}{\longmapsto} 0.$$

Donc, $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=0$.

*Remarque: On peut aussi considérer une suite $(x_n)_n$ tendant vers $+\infty$ et utiliser le T.C.D.*

---

6. **Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle vérifie l'équation différentielle**

$$y'-y=-\frac{\alpha}{\sqrt{x}},\ \text{où } \alpha=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du.$$

L'application $g:\ (x,t)\longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$, vérifie l'hypothèse de domination et admet une dérivée partielle première, par rapport à la variable $x$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=-\sqrt{t}\frac{e^{-xt}}{t+1} \text{ qui est continue sur } \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*.$$

De plus, pour tout segment $[a,b]\subset]0,+\infty[$, pour tout $x\in[a,b]$ et $t>0$, on a:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{\sqrt{t}\,e^{-at}}{t+1}\text{: continue par morceaux et intégrable sur } ]0,+\infty[.$$

Ainsi, $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$f'(x)=-\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\frac{e^{-xt}}{t+1}dt.$$

D'où

$$f'(x)-f(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}dt-\int_0^{+\infty}\frac{t\,e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}dt=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt \underset{u=xt}{=} -\frac{\alpha}{\sqrt{x}}.$$

---

7. **Résoudre l'équation différentielle (1)(*On donnera une solution particulière sous forme intégrale*).**

Les solutions générales de l'équation homogène sont données par $y_h(x)=\lambda e^x$, $\lambda\in\mathbb{K}$.
Une fonction de la forme $y_0(x)=\lambda(x)e^x$ est une solution particulière de l'équation (1) si, et seulement si, $\lambda'(x)=-\dfrac{\alpha}{\sqrt{x}}e^{-x}$, $x>0$.

Comme, l'application $t\longmapsto\dfrac{\alpha}{\sqrt{t}}e^{-t}$ est intégrable au voisinage de 0, alors on peut choisir $\lambda(x)=-\alpha\displaystyle\int_0^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$.

Ainsi, les solutions de (1), sur $]0,+\infty[$, sont de la forme:

$$y(x)=\lambda e^x-\alpha e^x\int_0^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt,\ \lambda\in\mathbb{K}.$$

---

8. **En déduire que:**

$$\forall x\geq 0,\quad e^{-x}f(x)=\pi-\alpha\int_0^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$$

L'application $f$ est solution de (1), donc il existe $\lambda\in\mathbb{K}$, telle que
$\forall x>0,\quad f(x)=\lambda e^x-\alpha e^x\displaystyle\int_0^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt,\ \lambda\in\mathbb{K}.$

Comme $f$ est continue en 0 et $t\longmapsto\dfrac{\alpha}{\sqrt{t}}e^{-t}$ est intégrable au voisinage de 0, alors, en faisant tendre $x$ vers 0, on obtient $\pi=f(0)=\lambda$. On aura:

$$\forall x\geq 0,\quad e^{-x}f(x)=\pi-\alpha\int_0^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$$

9. **Déterminer alors la valeur de $\alpha$ et déduire que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.**

En faisant tendre $x$ vers $+\infty$ et en utilisant le fait que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$ et que $t \longmapsto \frac{\alpha}{\sqrt{t}} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, on aura: $0 = \pi - \alpha^2$, comme $\alpha \geq 0$ donc $\alpha = \sqrt{\pi}$. D'où:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \underset{u=x^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} du = \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

## Partie II (points)

1. **Justifier l'existence de $I_n$ et calculer $I_0$.**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'application $x \longmapsto \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, de plus $\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} \underset{x \mapsto +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n+2}}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ puisque $2n+2 > 1$.

$I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

2. **Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} I_n = 0$.**

On pose $f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}$, $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. On a: $(f_n)_n$ est décroissante, donc la suite $(I_n)_n$ l'est, de plus,

$$f_n \overset{C.S.}{\longmapsto} \varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

Comme $f_n$ et sa limite simple $\varphi$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$, alors, d'après, le T. C. M.:

$$\lim_{n \mapsto +\infty} I_n = \lim_{n \mapsto +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = 0.$$

3. **Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n I_n$ est convergente et calculer sa somme.**

D'après le critère des séries alternées (C. S. A. ), et puisque la suite $(I_n)_n$ est décroissante et convergente vers 0, la série $\sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n I_n$ est convergente.

D'autre part, la série des fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n f_n$ est simplement convergente sur $]0, +\infty[$ (série géométrique) et sa somme est

$S(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{2+x^2}$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$.

De plus son reste $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k f_k(x)$, vérifie: $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leq f_{n+1}(x)$. (C. S. A.)

Alors $R_n$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et on a:

$$\int_0^{+\infty} S(x) dx = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k(x) dx + \int_0^{+\infty} R_n(x) dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} (-1)^k f_k(x) dx + \int_0^{+\infty} R_n(x) dx.$$

Or on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^{+\infty} R_n(x) dx \right| \leq \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x) dx = I_{n+1} \underset{n \mapsto +\infty}{\longmapsto} 0. \text{ Donc } \lim_{n \mapsto +\infty} \int_0^{+\infty} R_n(x) dx = 0.$$

D'où,

$$\int_0^{+\infty} S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_n.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2+x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}})]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

On obtient finalement:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

4. **Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} I_n$ est divergente.**

La série des fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est une série des fonctions positives et intégrables sur $]0,+\infty[$. De plus, elle converge simplement, sur $]0,+\infty[$ vers la fonction

$T:\ x \longmapsto T(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \dfrac{1}{x^2}.$

D'après le T. C. M. pour les séries des fonctions: La fonction $T$ est intégrable sut $]0,+\infty[$ si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n\geq 0} I_n$ est convergente.

Comme $T$ est non intégrable sur $]0,+\infty[$, on conclut que la série $\sum_{n\geq 0} I_n$ est divergente.

5. **Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,**

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$I_n = \int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}dx = \int_0^{\infty}\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx - \int_0^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx.$$

On intègre par parties dans la dernière intégrale, on obtient, puisque $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$,

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx = \left[-\frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2n}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{1}{2n}I_{n-1}.$$

D'où: $I_n = I_{n-1} - \dfrac{1}{2n}I_{n-1} = \dfrac{2n-1}{2n}I_{n-1}.$

6. **En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,**

$$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

La relation demandée est vraie pour $n = 0$.

Supposons qu'elle est vraie pour un ceratin ordre $n$. On a:

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

D'où la relation est vraie pour l'ordre $n+1$.

7. **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,**

$$\sqrt{n+1}\, I_n = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+\frac{t^2}{n+1})^{n+1}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+\frac{t^2}{n+1})^{n+1}} \underset{u=\frac{t}{\sqrt{n+1}}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}\,du}{(1+u^2)^{n+1}} = \sqrt{n+1}\; I_n.$$

---

8. **Pour $t > 0$ fixé, étudier les variations de la fonction: $x \longmapsto x\ln\left(1+\dfrac{t^2}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déduire que**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(1+\frac{t^2}{n+1}\right)^{-n-1} \leq \frac{1}{1+t^2},$$

Soit $t > 0$. On pose $g_t(x) = x\ln\left(1+\dfrac{t^2}{x}\right)$. L'application $g$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a:

$$g_t'(x) = \ln\left(1+\frac{t^2}{x}\right) - \frac{t^2}{x+t^2} \text{ et } g_t''(x) = -\frac{t^4}{x(x+t^2)^2} < 0.$$

Donc, $g_t'$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, comme $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g_t'(x) = 0$, donc $g_t'(x)$ est positive, donc $g_t$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(1+\frac{t^2}{n+1}\right)^{-n-1} = e^{-(n+1)\ln(1+\frac{t^2}{n+1})} = e^{-g_t(n+1)} \leq e^{-g_t(1)} = \frac{1}{1+t^2}.$$

---

9. **Montrer alors que:**

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \sqrt{n+1}\; I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Soit $h_n(t) = \dfrac{1}{(1+\frac{t^2}{n+1})^{n+1}}$, $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$\lim_{n\mapsto+\infty} h_n(t) = \lim_{n\mapsto+\infty} e^{-(n+1)\ln(1+\frac{t^2}{n+1})} = e^{-t^2} \text{ et } |g_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2}\text{: intégrable sur } \mathbb{R}_+.$$

Donc, d'après le T. C. D.,

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \sqrt{n+1}\; I_n = \lim_{\mapsto+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\mapsto+\infty} h_n(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

---

10. **En déduire *la formule de Wallis*:**

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

D'après la question précédente et l'équivalence $\sqrt{n+1} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \sqrt{n}$, on a $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}\,I_n} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

En remplaçant $I_n$ par son expression, $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, on obtient:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

---

## Partie III (points)

1. **Montrer que:**

$$u_n - u_{n-1} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

$$u_n - u_{n-1} = -(n-\frac{1}{2})\ln(1-\frac{1}{n}) - 1 = (n-\frac{1}{2})\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right) - 1 = \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

D'où $u_n - u_{n-1} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.

2. **En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.**

D'après l'équivalence précédente, la série $\sum_{n\geq 2}(u_n - u_{n-1})$ converge, donc la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=2}^{n}(u_k - u_{k-1})\right)_n$ est convergente et par suite la suite $(u_n)_n$ est convergente.

On note $\ell = \lim_{+\infty} u_n$.

3. **Montrer que $n! \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} e^{-\ell}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$.**

On a:

$$\ell = \lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} \ln\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n n!}\right), \text{ donc } \lim_{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n n!} = e^{\ell}.$$

Ainsi, $\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n n!} \underset{+\infty}{\sim} e^{\ell}$, c'est à dire $n! \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} e^{-\ell}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$.

4. **En utilisant la formule de Wallis (3), montrer que $\ell = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.**

On remplace dans la formule de Wallis, $n!$ et $(2n)!$ par leurs équivalents respectifs, on obtient:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{2^{2n}(e^{-\ell}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n})^2}{e^{-\ell}\,(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\, e^{-2n}\sqrt{n}} = \frac{e^{-\ell}}{\sqrt{2}}.$$

D'où $\ell = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

5. **En déduire *la formule de Stirling*:**

$$n! \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

En remplaçant $e^{-\ell}$ par $\sqrt{2\pi}$ dans l'équivalence de la question 3.)-partie III, on obtient la formule demandée.

6. **En utilisant l'équivalence donnée par la formule (3), et en remarquant que $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, montrer que:**

$$\ln(\sqrt{2\pi}) + u_n \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n}.$$

On a:

$$\frac{1}{n^2} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \text{ et } u_n - u_{n-1} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

Comme les suites considérées sont à termes positifs et les séries associées sont convergentes, on aura:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \text{ et } \sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_k - u_{k-1}) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{12}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Par transitivité, on obtient:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_k - u_{k-1}) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{12}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

Or on a:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_k - u_{k-1}) = \lim_{N\mapsto+\infty}\sum_{k=n+1}^{N}(u_k - u_{k-1}) = \lim_{N\mapsto+\infty}(u_N - u_n) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - u_n$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\lim_{N\mapsto+\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\lim_{N\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)=\frac{1}{n}.$$

D'où $-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-u_n \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{12n}$ c'est à dire $\ln(\sqrt{2\pi})+u_n \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n}$.

7. **En déduire la formule asymptotique:**

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

D'après la question précédente, on a:

$$-\ln(\sqrt{2\pi})-u_n \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{12n} \text{ donc } e^{-\ln(\sqrt{2\pi})-u_n}=e^{\frac{1}{12n}+o(\frac{1}{n})}=1+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc,

$$\frac{e^n n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}}=1+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Soit encore: $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

## Problème II:

### Partie I (points)

1. **Montrer que $\zeta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et exprimer ses dérivées successives comme sommes de séries de fonctions.**

On pose $f_n(x)=\frac{1}{n^x}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>1$.

- La série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $x\longmapsto f_n(x)=\frac{1}{n^x}=e^{-x\ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $f_n^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k\ln^k(n)}{n^x}$.
- Soit $[a,b]\subset]1,+\infty[$. On a:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[a,b], \forall k\in\mathbb{N}, \quad \left|f_n^{(k)}(x)\right|\leq\frac{\ln^k(n)}{n^x}\leq\frac{\ln^k(n)}{n^a}.$$

  Soit un réel $\lambda$ tel que $1<\lambda<a$. On a $\lim_{n\mapsto+\infty} n^\lambda\frac{\ln^k(n)}{n^a}=0$, donc la série $\sum_{n\geq1}\frac{\ln^k(n)}{n^a}$ est convergente.
  Ainsi, la série $\sum_{n\geq1} f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de $]1,+\infty[$.

D'où $\zeta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et $\zeta^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\ln^k(n)}{n^x}$.

2. **Montrer que $\lim_{x \mapsto +\infty} \zeta(x) = 1$.**

On a: $\lim_{x \mapsto +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 2 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$

De plus, la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément au voisinage de $+\infty$ puisque,

$$\forall a > 1, \forall x \geq 1, \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^a}\text{: terme général d'une série convergente.}$$

D'après le théorème de la double limite: $\lim_{x \mapsto +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \mapsto +\infty} f_n(x) = 1.$

3. **Montrer que $\theta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est bien définie sur $]0, +\infty[$ et que:**

$$\forall x > 1, \, \theta(x) = \left(1 - 2^{1-x}\right) \zeta(x).$$

Pour tout $x > 0$, la suite $\frac{1}{n^x}$ est décroissante et converge vers 0. D'après le C. S. A., la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge pour tout $x > 0$. Donc $\theta$ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Soit $x > 1$. On pose: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^x}$ et $T_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$. On a:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^x} = \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^x} \text{ et}$$

$$T_n(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^x} = -\frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^x}.$$

Donc, $S_n(x) - T_n(x) = \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$.

En faisant tendre $n$ vers $+\infty$, on obtient: $\zeta(x) - \theta(x) = \frac{1}{2^{x-1}} \zeta(x)$. Donc, $\theta(x) = \left(1 - 2^{1-x}\right) \zeta(x)$.

4. **Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{1}{F(x)}$ s'écrit, sur $\mathbb{R}$, comme somme d'une série entière.**

Pour $x \neq 0$, on a:

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

La relation précédente est vraie pour $x = 0$.

5. **En déduire que $F$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.**

La fonction $\frac{1}{F}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc $F$ l'est.

## Partie II (points)

1. **Vérifier que $b_0 = 1$ et que $b_1 = -\frac{1}{2}$.**

On a, $b_0 = F(0) = 1$ et $b_1 = F'(0)$. Comme

$$F(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + o(x)} = 1 - \frac{x}{2} + o(x). \text{ Donc } F'(0) = -\frac{1}{2}.$$

2. **Montrer que la fonction $G: x \longmapsto F(x) + \frac{1}{2}x$ est paire sur $\mathbb{R}$ et déduire que:**

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad b_{2k+1} = 0.$$

---

On a $G(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$G(x) - G(-x) = F(x) - F(-x) + x = x\left(\frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{e^{-x} - 1} + 1\right) = x\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x - 1} + 1\right) = 0.$$

Donc $G$ est paire. On dérive $2k+1, k \in \mathbb{N}^*$, dans l'égalité $G(-x) = G(x)$, on obtient

$$(-1)^{2k+1}G^{(2k+1)}(-x) = G^{(2k+1)}(x), \text{ donc } -F^{(2k+1)}(-x) = F^{(2k+1)}(x).$$

Pour $x = 0$, on aura $b_{2k+1} = 0, k \in \mathbb{N}^*$.

3. **Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. En dérivant $n$-fois la formule:**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^x - 1)F(x) = x,$$

**montrer que:**

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k b_{n-k} = 0, \text{ où } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

---

On dérive $n$-fois la formule donnée ($n \geq 2$), on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{d^n}{dx^n}[(e^x - 1)F(x)] = 0$.

En utilisant la formule de Leibniz: $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$, on obtient:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^k}{dx^k}(e^x - 1)\,\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}F(x) = 0, \text{ donc, en faisant } x = 0, \text{ on aura: } \sum_{k=1}^{n} C_n^k b_{n-k} = 0.$$

4. **Calculer $b_2$ et $b_4$.**

---

On applique la formule de la question précédente pour $n = 3$, on aura:

$$C_3^1 b_2 + C_3^2 b_1 + C_3^3 b_0 = 0, \text{ donc } 3b_2 + 3b_1 + b_0 =. \text{ Ainsi, } b_2 = \frac{1}{6}.$$

Pour $n = 5$, on obtient:

$$C_5^1 b_4 + C_5^2 b_3 + C_5^3 b_2 + C_5^4 b_1 + C_5^5 b_0 = 0, \text{ donc } 5b_4 + 10b_2 + 5b_1 + b_0 = 0. \text{ D'où } b_4 = -\frac{1}{30}.$$

5. **Pour n$\in \mathbb{N}$, on pose**

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_{n-k} X^k.$$

(a) **Calculer $B_0(X)$, $B_1(X)$, $B_2(X)$ et $B_3(X)$.**

---

En utilisant les expressions de $b_0, b_1, b_2$ et $b_3$, on obtient

$$B_0 = 1,\ B_1 = X - \frac{1}{2},\ B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6} \text{ et } B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X.$$

(b) **Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $B_n(0) = b_n = B_n(1)$.**

---

On a $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_{n-k} X^k$, donc $B_n(0) = C_n^0 b_n = b_n$. D'autre part,

$$B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_{n-k} = b_n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k b_{n-k} = b_n, \text{ d'après la formule da la question 3. partie II.}$$

(c) **Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $B'_{n+1}(X) = (n+1)B_n(X)$.**

On a, en remarquant que $kC_{n+1}^k = (n+1)C_n^{k-1}$,

$$B'_{n+1}(X) = \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k b_{n+1-k} k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} (n+1) C_n^{k-1} b_{n-(k-1)} X^{k-1} \underset{k \leftrightarrow k-1}{=} (n+1)B_n(X).$$

(d) **Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, d'après $(b)-(c)$,

$$\int_0^1 B_n(t)dt = \frac{1}{n+1}\int_0^1 B'_{n+1}(t)dt = \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)\right) = 0.$$

## Partie III (points)

1. **Montrer que $\varphi_n$ est continue et est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.**

L'application $\varphi_n$ est 1- périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur [0,1] (fonction polynôme) donc elle est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2. **Que peut-on dire de la série de Fourier de $\varphi_n$.**

La série de Fourier de $\varphi_n$ converge normalement vers $\varphi_n$ sur $\mathbb{R}$.

(a) **Montrer que $c_0(\varphi_n) = 0$.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $c_0(\varphi_n) = \int_0^1 \varphi_n(t)dt = \int_0^1 B_n(t)dt = 0.$

(b) **Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$,**

$$c_p(\varphi_{n+1}) = \frac{n+1}{2ip\pi}c_p(\varphi_n).$$

$$c_p(\varphi_{n+1}) = \int_0^1 \varphi_{n+1}(t)e^{-2i\pi pt}dt \underset{I.P.P.}{=} \frac{1}{-2i\pi p}\underbrace{\left[e^{-2i\pi pt}B_{n+1}(t)\right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{2i\pi p}\int_0^1 B'_{n+1}(t)e^{-2i\pi pt}dt =$$

$$\frac{n+1}{2i\pi p}\int_0^1 B_n(t)e^{-2i\pi pt}dt = \frac{n+1}{2ip\pi}c_p(\varphi_n).$$

(c) **En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$,**

$$c_p(\varphi_n) = \frac{-n!}{(2ip\pi)^n}.$$

Par récurrence sur $n$. Pour $n = 1$,

$$c_p(\varphi_1) = \frac{1}{-2i\pi p}\left[e^{-2i\pi pt}(t - \frac{1}{2})\right]_0^1 + \frac{1}{2i\pi p}\underbrace{\int_0^1 e^{-2i\pi pt}dt}_{=0} = \frac{1}{-2i\pi p}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $c_p(\varphi_n) = \dfrac{-n!}{(2ip\pi)^n}$. On a:

$$c_p(\varphi_{n+1}) = \frac{n+1}{2ip\pi}c_p(\varphi_n) = \frac{n+1}{2ip\pi}\frac{-n!}{(2ip\pi)^n} = \frac{-(n+1)!}{(2ip\pi)^{n+1}}.$$

Ainsi, la formule est valable pour tout entier non nul.

(d) **Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$,**

$$B_{2n}(t) = 2(-1)^{n+1}(2n)! \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi pt)}{(2\pi p)^{2n}}.$$

La série de Fourier de $\varphi_{2n}$ converge normalement vers $\varphi_{2n}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout $t \in [0,1]$, on a:

$$\varphi_{2n}(t) = B_{2n}(t) = \underbrace{c_0(\varphi_{2n})}_{=0} + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(c_p(\varphi_{2n})e^{2i\pi pt} + c_{-p}(\varphi_{2n})e^{-2i\pi pt}\right) =$$

$$-(2n)! \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2i\pi p)^{2n}} \left(e^{2i\pi pt} + e^{-2i\pi pt}\right) = -2(2n)! \frac{1}{i^{2n}} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi pt)}{(2\pi p)^{2n}} =$$

$$2(-1)^{n+1}(2n)! \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi pt)}{(2\pi p)^{2n}}.$$

(e) **En déduire que:**

$$b_{2n} = \frac{2(-1)^{n+1}(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n).$$

On choisit $t = 0$, dans l'égalité de la question précédente, on obtient:

$$b_{2n} = B_{2n}(0) = \frac{2(-1)^{n+1}(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2n}} = \frac{2(-1)^{n+1}(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n).$$

3. **Donner les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$. En déduire les valeurs des sommes**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}.$$

On a $b_2 = -\frac{1}{6}$ et $b_4 = \frac{1}{30}$. Donc $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.
D'après la question 3), partie I:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \theta(2) = (1 - \frac{1}{2})\zeta(2) = \frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \theta(4) = (1 - \frac{1}{8})\zeta(4) = \frac{7\pi^4}{720}.$$

4. **Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n$ est égal à $2\pi$.**

On pose, $u_n(x) = \left|\frac{b_n}{n!} x^n\right| = \frac{2}{(2\pi)^{2n}\zeta(2n)} |x|^{2n} \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \frac{2}{(2\pi)^{2n}} |x|^{2n} = v_n(x)$, car $\lim_{n\mapsto+\infty} \zeta(2n) = 1$.

Pour $x \neq 0$, on a $\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} = \frac{|x|^2}{4\pi^2}$.

Si $\frac{|x|^2}{4\pi^2} < 1$, la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ converge absolument et si $\frac{|x|^2}{4\pi^2} > 1$, la série $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ diverge.

D'où $R = 2\pi$.

5. **Montrer que, pour tout $x \in ]-2\pi, 2\pi[$,**

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n\right) = 1.$$

Pour tout $x \in ]-2\pi,2\pi[$, les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n+1)!}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!}x^n$ sont absolument convergentes et on a:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}\right) x^n =$$

$$b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}\right) x^n \underset{n\leftrightarrow n+1}{=} 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} \frac{b_{n-1-k}}{(n-1-k)!}\right) x^{n-1} \underset{k\leftrightarrow k+1}{=}$$

$$1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}\right) x^{n-1} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k b_{n-k}\right)}_{=0,\text{d'après 3) partie II}} x^{n-1} = 1.$$

---

6. **En déduire que $F$ est développable en série en 0 et que pour tout $x \in ]-2\pi,2\pi[$,**

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}x^n.$$

---

L'égalité précédente s'écrit: $(e^x - 1)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}x^n = x, \forall x \in ]-2\pi,2\pi[$, or on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x - 1)F(x) = x$.

Ainsi, on obtient:

$$\forall x \in ]-2\pi,2\pi[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}x^n,$$

ce qui donne le développement en série entière en 0 de $F$.